



مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

آزمون شماره ۲
۲ شهریور ۱۴۰۳



پاسخنامه ریاضی - فیزیک

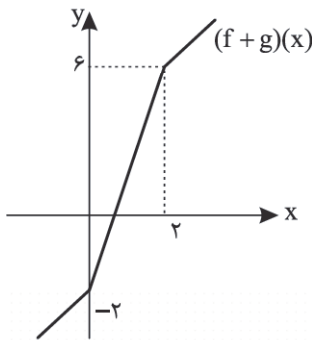
ردیف	نام درس	سرگروه	گروه طراحی و بازنگری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران
۱	حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان	مهرداد شریف - نیکا موسوی	
۲	هندسه	مهرداد راشدی	حسن محمدبیگی - محمد شاه محمدی احمد رضا فلاح	نیما اشرف نیا - مهرداد شریف
۳	گسسته	رضا توکلی	رضا توکلی - سوگند روشنی	نیما اشرف نیا - مهرداد شریف
۴	فیزیک	جواد قزوینیان	علیرضا مهرداد - مرتضی میرخانی	مهرداد شریف - محمد رضا خادمی
۵	شیمی	مسعود جعفری	جواد پرتوی - محمد عظیمیان زواره	محمد داود آبادی - کارو محمدی

گروه تایپ و ویراستاری (به ترتیب حروف الفبا)
زهرا احدی - امیرعلی الماسی - مبینا بهرامی - معین الدین تقی زاده - کبری سلیمانی - مهرداد شمسی - راضیه صالحی - انسیه مرزبان

برای اطلاع از اخبار مرکز سنجش آموزش مدارس برتر، به کانال تلگرام @taraaznet مراجعه نمایید.



$$(f+g)(x) = \begin{cases} 3x-2 & x < 0 \\ 4x-2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 3x & x > 2 \end{cases}$$



۶. گزینه ۳ صحیح است.

$$(0, -1) \in \text{gof} \Rightarrow \text{gof}(0) = -1 \Rightarrow 0 \in D_f \Rightarrow a = 0$$

$$\text{gof}(0) = g(1) = c \Rightarrow c = -1$$

$$(3, 2) \in \text{fog} \Rightarrow \text{fog}(3) = 2 \Rightarrow b = 3$$

$$f = \{(3, 2), (-1, 2), (0, 1)\}$$

$$g = \{(1, -1), (2, 2), (3, 2)\}$$

$$cf(c) + bg(b-1) = -f(-1) + 3g(2) = -2 + 3 \times 2 = 4$$

۷. گزینه ۲ صحیح است.

$$g(x) = [x] + [-x] + 4 \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 4 & x \in \mathbb{Z} \\ 3 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

برای آنکه $y = \text{fog}(x)$ تابعی ثابت باشد، باید $f(4) = f(3)$ پس:

$$\begin{cases} f(4) = 64 + 4a \\ f(3) = 36 + 3a \end{cases} \Rightarrow 64 + 4a = 36 + 3a \Rightarrow a = 36 - 64 = -28$$

۸. گزینه ۳ صحیح است.

$$-1 < x < 0 \Rightarrow y = -1 - x + 1 = -x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0 - x - 0 = -x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1 - x - \sin \frac{\pi}{2} = -x$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow y = 2 - x - 0 = 2 - x$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow y = 3 - x + 1 = 4 - x$$

در این بازه، نمودار تابع از ۳ پاره خط به موازات هم تشکیل شده است.

۹. گزینه ۴ صحیح است.

در انبساط افقی باید x به $\frac{x}{k}$ که $k > 1$ تبدیل شود و در انقباض عمودی باید مقادیر تابع در k' که $0 < k' < 1$ ضرب شود. این اتفاق فقط در گزینه ۴ رخ داده است.

۱۰. گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{\text{قرینه به محور عرض ها}}{y = \sqrt{6+x}} \Rightarrow y = \sqrt{6+x+\alpha}$$

$$\sqrt{6+x+\alpha} = \sqrt{6-x} \Rightarrow x = -2$$

$$4 + \alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow f(-4) = \sqrt{6+4} = \sqrt{10}$$

۱۱. گزینه ۳ صحیح است.

$$y = f\left(2 - \frac{x-2}{3}\right) \quad \text{ابتدا ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم:}$$

$$y = f\left(2 - \frac{x-2}{3}\right) \quad \text{پس طول نقاط را ۳ برابر می‌کنیم:}$$

$$\Rightarrow y = f\left(2 - \frac{x-6}{9}\right) \Rightarrow y = f\left(\frac{24-x}{9}\right)$$

حسابان

۱. گزینه ۳ صحیح است.

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm 5 \Rightarrow (0, 5), (0, -5)$$

$$x = \pm 1 \Rightarrow y^2 = 24 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$$

$$x = \pm 2 \Rightarrow y^2 = 21 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$$

$$x = \pm 3 \Rightarrow y = \pm 4$$

$$\Rightarrow (3, 4) (3, -4) (-3, 4) (-3, -4)$$

$$x = \pm 4 \Rightarrow y = \pm 3$$

$$\Rightarrow (4, 3) (4, -3) (-4, 3) (-4, -3)$$

$$x = \pm 5 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (5, 0), (-5, 0)$$

پس اگر حداقل ۵ زوج مرتب حذف کنیم تابع خواهد شد.

۲. گزینه ۲ صحیح است.

$$g(3-x) = \sqrt{8-x} \quad 3-x=t \rightarrow g(t) = \sqrt{8-(3-t)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \sqrt{5+x}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x-a) &= \sqrt{b+x} \\ x-a=t &\Rightarrow x=a+t \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(t) = \sqrt{a+b+t}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x+a+b}$$

چون $f(x) = g(x)$ پس $a+b=5$.

۳. گزینه ۱ صحیح است.

$$I) 12-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 12$$

$$II) x - \sqrt{12-x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{12-x} \leq x$$

$$\frac{x \geq 0}{x^2 + x - 12 \geq 0} \Rightarrow (x+4)(x-3) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$(I) \cap (II) : D_f = [3, 12] \Rightarrow \text{تعداد اعداد صحیح} = 10$$

۴. گزینه ۴ صحیح است.

اولاً بیان شده برد شامل ۶ عدد صحیح غیرمنفی باشد، پس $x > 0$ با توجه به آنکه عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد، داریم:

$$\frac{k}{x} \geq 4, x > 0 \Rightarrow k > 0$$

$$f(x) = \sqrt{kx - 4x^2}, 0 < x \leq \frac{k}{4}$$

یعنی عبارت $kx - 4x^2$ به ازای $x = \frac{k}{8}$ بیشترین مقدار خواهد بود (نقطه وسط ۲ ریشه طول رأس سهمی است). بنابراین:

$$0 < x \leq \frac{k}{4} \Rightarrow f\left(\frac{k}{8}\right) = \sqrt{\frac{k^2}{8} - \frac{4k^2}{64}}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{k}{8}\right) = \sqrt{\frac{4k^2}{64}} = \frac{2k}{8} = \frac{k}{4}$$

دقت کنیم باید اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ اعداد صحیح داخل برد باشند. پس:

$$5 \leq \frac{k}{4} < 6 \Rightarrow 20 \leq k < 24$$

۵. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا ضابطه هر یک از نمودارها را به دست آورده و به کمک آن ضوابط f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) + 2x = \begin{cases} x & x \leq 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 2 \\ 2-2x & x > 2 \end{cases}$$

$$4x - g(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 2-x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 4x-2 & x < 0 \\ 5x-2 & x \geq 0 \end{cases}$$



نقطه A بر f واقع است، پس:

$$f(3) = 1 - m$$

$$9 - 6 + m = 1 - m \Rightarrow m = -1$$

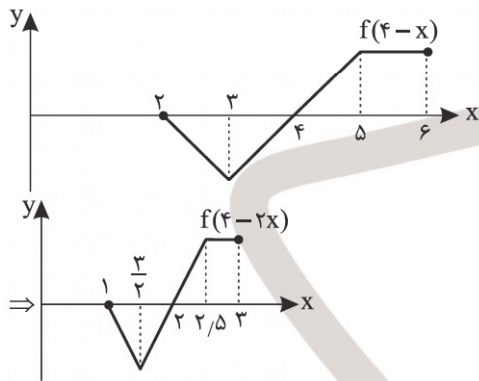
گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا نمودار با یک انتقال افقی را تماماً در یک ناحیه قرار می‌دهیم. سپس نسبت به محور عرض‌ها بازتاب می‌دهیم. لذا $y = f(x+2)$ تماماً در ناحیه دوم است. لذا در تابع $y = f(-x+a)$ با شرط $a \geq 2$ همین اتفاق می‌افتد.

لذا $f(x-2)$ تماماً در ناحیه اول است. لذا $y = f(-x-2)$ تماماً در ناحیه دوم است. لذا اگر $|a| \geq 2$ ، نمودار تابع فقط در یک ناحیه قرار می‌گیرد.

گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x) \xrightarrow[\text{خط } x=2]{\text{قرینه نسبت به}} f(4-x) \xrightarrow{\text{طول نقاط نصف}} f(4-2x)$$



گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x) = 6x^2 - (abx - 2ax^2 + 2b - 4x) - b$$

$$\Rightarrow f(x) = (6+2a)x^2 + (4-ab)x - 2b - b$$

$$\Rightarrow a = -3, 4+2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4$$

هندسه

گزینه ۳ صحیح است.

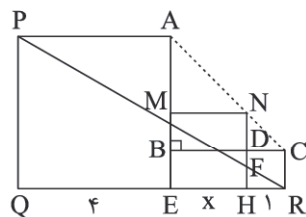
از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 3$ نتیجه می‌گیریم $a = 3b$ و $c = 3d$. پس:

$$\frac{abc + abd}{b^2d} = \frac{ac + ad}{bd} = \frac{(3b)(3d) + (3b)(d)}{bd} = \frac{12bd}{bd} = 12$$

(هندسه دهم، صفحه ۳۰)

گزینه ۴ صحیح است.

طول ضلع مربع وسطی را X در نظر می‌گیریم. مطابق شکل ضلع مربع کوچک‌تر را امتداد می‌دهیم تا ضلع مربع متوسط را در B قطع کند. اکنون با استفاده از قضیه تالس می‌نویسیم:



$$\triangle ABC : MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \quad (1)$$

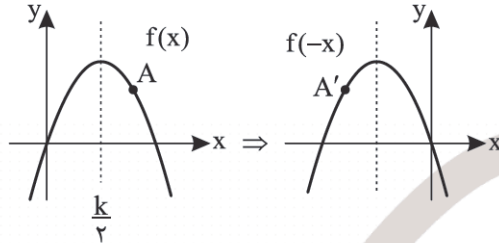
گزینه ۳ صحیح است.

$$y = kx - x^2 \xrightarrow[\text{محور عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = k(-x) - (-x)^2 = -kx - x^2$$

اگر نمودار را k واحد به راست انتقال دهیم، آنگاه:

$$y = -k(x-k) - (x-k)^2 = -kx + k^2 - x^2 - k^2 + 2kx = kx - x^2$$

نمودار بر خودش منطبق می‌شود. اما نقطه A به نقطه A'' مطابق شکل انتقال پیدا می‌کند:



A'' قرینه A نسبت به خط $x = \frac{k}{2}$ است. یعنی:

$$A'' = (k - x_0, y_0)$$

گزینه ۱ صحیح است.

اگر نمودار تابع نسبت به مبدأ قرینه شود، هم‌زمان X و Y قرینه می‌شوند و اگر طول نقاط نصف شود، X به 2X تبدیل می‌شود:

$$\xrightarrow[\text{مبدأ مختصات}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \frac{-2x+k}{-x-4} = \frac{k-2x}{x+4}$$

$$\xrightarrow{\text{طول نقاط نصف}} y = \frac{k-4x}{2x+4}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2x+k}{x-4} \\ y = \frac{k-4x}{2x+4} \end{cases} \xrightarrow{x=-1} \begin{cases} -2+k = \frac{k+4}{-1-4} \\ -1-4 = \frac{-2+4}{-2+4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{k-2}{-5} = \frac{k+4}{2} \Rightarrow 2k-4 = -5k-20 \Rightarrow 7k = -16$$

$$\Rightarrow k = -\frac{16}{7}$$

گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x) = \frac{1}{2-3x} \xrightarrow{\text{سه واحد به راست}} y = \frac{1}{2-3(x-3)} = \frac{1}{-3x+11}$$

$$\xrightarrow{\text{طول نقاط دو برابر}} g(x) = \frac{1}{-\frac{3}{2}x+11} = \frac{2}{22-3x}$$

برای یافتن ضابطه h داریم:

$$f(x) = \frac{1}{2-3x} \xrightarrow{\text{طول نقاط نصف}} y = \frac{1}{2-6x}$$

$$\xrightarrow{\text{سه واحد به چپ}} h(x) = \frac{1}{2-6(x+3)} = \frac{1}{-6x-16}$$

$$g(x) = \frac{2}{22-3x}, h(x) = \frac{1}{-6x-16} \Rightarrow h(-3) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow goh(-3) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{22-3\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{41}$$

گزینه ۴ صحیح است.

$$f \text{ رأس سهمی } A(1, m-1)$$

$$2 \text{ واحد راست } A'(3, m-1)$$

$$\text{قرینه } A''(3, 1-m)$$

$$\Delta ABD : BD^2 = AB^2 + AD^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow BD = 10$$

$$\Delta BDE \Rightarrow BD = DE \xrightarrow{BD=10} DE = 10$$

$$EC = DC - DE = 14 - 10 = 4$$

اگر N وسط BC باشد، سوال از ما طول MN را می‌خواهد.

از طرف دیگر در مثلث متساوی الساقین BDE ارتفاع DM میانه هم هست. پس $BM = ME = 6$.

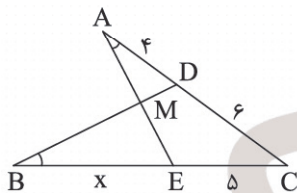
بنابراین:

$$\Delta BEC : \frac{BM}{ME} = \frac{BN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel EC$$

$$\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{EC} = \frac{BM}{BE} \Rightarrow \frac{MN}{4} = \frac{6}{12} \Rightarrow MN = 2$$

(هندسه دهم، صفحه ۳۶)

۲۳. گزینه ۱ صحیح است.



مثلث‌های ΔBCD و ΔAEC به حالت (ز ز) متشابه‌اند. (\hat{C} مشترک و $\hat{A} = \hat{B}$). بنابراین:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{5}{x+5} \Rightarrow 60 = 5x + 25 \Rightarrow 35 = 5x \Rightarrow x = 7$$

از طرفی مثلث‌های ΔAMD و ΔBME نیز به حالت (ز ز) متشابه‌اند نسبت تشابه است. ($\hat{A} = \hat{B}$, $\hat{M} = \hat{M}$). بنابراین نسبت مساحت‌های آنها برابر با مربع

$$\frac{S_{\Delta AMD}}{S_{\Delta BME}} = \left(\frac{AD}{BE}\right)^2 = \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$$

(هندسه دهم، صفحه ۳۹)

۲۴. گزینه ۱ صحیح است.

دو مثلث ΔPQR و ΔABC به حالت تناسب سه ضلع با هم متشابه‌اند.

(زیرا $\frac{20}{30} = \frac{24}{36} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$) پس زوایای متناظر در هر دو مثلث با هم برابرند، یعنی:

$$\hat{B} = \hat{P}, \hat{A} = \hat{R}, \hat{C} = \hat{Q}$$

بنابراین:

$$\frac{\hat{A} + \hat{C} + \hat{P}}{\hat{P} + \hat{R} + \hat{C}} = \frac{\hat{A} + \hat{C} + \hat{B}}{\hat{P} + \hat{R} + \hat{Q}} = \frac{180^\circ}{180^\circ} = 1$$

(هندسه دهم، صفحه ۴۰)

۲۵. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا اندازه AB را می‌یابیم.

به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC^2 = BC \times CH \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = BC \times 9 \Rightarrow 36 \times 3 = 9BC$$

$$\Rightarrow BC = 12 \xrightarrow{CH=9} BH = 3$$

$$AB^2 = BC \times BH \Rightarrow AB^2 = 12 \times 3 = 36 \Rightarrow AB = 6$$

از طرف دیگر $BD = x$ و $CD = 1$ است پس $BE = 1$, $BC = x + 1$ است. همچنین $AB = 3$ و $AE = 4$ است. در نتیجه:

$$(1) \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{4-x}{3} \Rightarrow 3x = 4x - x^2 + 4 - x \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

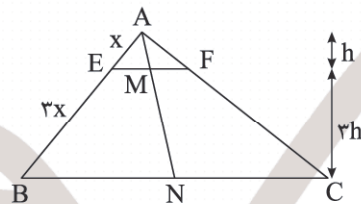
بنابراین:

$$\Delta PQR : FH \parallel PQ \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{FH}{PQ} = \frac{HR}{QR} \Rightarrow \frac{FH}{4} = \frac{1}{1+x+4}$$

$$\xrightarrow{x=2} FH = \frac{4}{7}$$

(هندسه دهم، صفحه ۳۵)

۲۱. گزینه ۳ صحیح است.



$$\frac{AE}{AB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} AE = x \\ EB = 3x \end{cases}$$

چون $EF \parallel BC$ است بنابر تالس ارتفاع مثلث AEF به ارتفاع مثلث ABC برابر ۱ به ۴ است. از طرفی:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{ME}{BN} \Rightarrow \frac{ME}{BN} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} ME = t \\ BN = 4t \end{cases}$$

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} AF = y \\ FC = 3y \end{cases}$$

$$MF \parallel NC \Rightarrow \frac{MF}{NC} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} MF = k \\ NC = 4k \end{cases}$$

$$\frac{S_{\Delta AME}}{S_{FMNC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \times EM \times h}{\frac{1}{2} \times (MF + NC) \times 3h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t}{(k + 4k) \times 3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 15k = 2t \Rightarrow k = \frac{2}{15}t$$

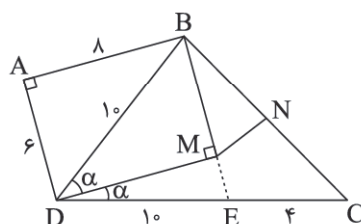
بنابراین:

$$\frac{MF}{BN} = \frac{k}{4t} = \frac{\frac{2}{15}t}{4t} = \frac{1}{30}$$

(هندسه دهم، صفحه ۳۵)

۲۲. گزینه ۳ صحیح است.

بنابر فرض سؤال DM نیمساز زاویه BDE است. پس در مثلث BDE پاره خط DM هم نیمساز و هم ارتفاع است. در نتیجه مثلث BDE متساوی الساقین است.





$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین رابطه (۱) را از چپ در وارون ماتریس ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس X برابر ۱۸- است.

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۵)

۳۰. گزینه ۲ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 2 & -b \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2b - 2a} \begin{bmatrix} -b & -a \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -b & -a \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4b}{2} + \frac{5a}{2} \\ \frac{12}{2} - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b + \frac{5a}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۵)

ریاضیات گسسته

۳۱. گزینه ۱ صحیح است.

۲) $6 | 3 \times 8 \Rightarrow 6 | 8$

۳) $6 | 2 + 4 \Rightarrow 6 | 6$

۴) $4 \times 6 | 12$ اما $4 | 12$ ، $6 | 12$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۹ و ۱۲)

۳۲. گزینه ۳ صحیح است.

اگر $a = 8$ و $b = 4$ و $c = 16$ ، شرایط سؤال برقرار است. اما $a^2 | c$ اثبات بقیه موارد:

۱) $\begin{cases} a^2 | b^3 \xrightarrow{\text{توان } 2} a^4 | b^6 \\ b^2 | c^3 \xrightarrow{\text{توان } 3} b^6 | c^9 \end{cases} \Rightarrow a^4 | c^9$

۲) $\begin{cases} a^2 | b^3 \\ b^2 | c \end{cases} \Rightarrow a^2 b^2 | b^3 c \xrightarrow{\frac{+b^2}{b \neq 0}} a^2 | bc$

۴) $a^2 | b^3 \xrightarrow{\times b} a^2 | b^4 \Rightarrow \begin{cases} a | b^2 \\ b^2 | c \end{cases} \Rightarrow a | c \Rightarrow a | c^2$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۹ و ۱۲)

۳۳. گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{1}{y+1} = \frac{3x-1}{x^2-1} \Rightarrow y+1 = \frac{x^2-1}{3x-1} \quad x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x-1 | x^2-1$$

$$\Rightarrow 3x-1 | (x^2-1) - x(3x-1)$$

$$\Rightarrow 3x-1 | 2(x+3) - 3x+1 \Rightarrow 3x-1 | 8$$

$$\Rightarrow 3x-1 = \pm 1 \text{ یا } \pm 2 \text{ یا } \pm 4 \text{ یا } \pm 8 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 1$$

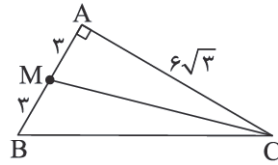
$$\xrightarrow{\text{دامنه تابع}} x = 0, 3$$

$$B \begin{vmatrix} 3 & \\ & 0 \end{vmatrix}, A \begin{vmatrix} & \\ & 0 \end{vmatrix}$$

روی منحنی فوق هستند.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۲)

بزرگ‌ترین میانه، نظیر کوتاه‌ترین ضلع است.



$$\Delta AMC : CM^2 = (6\sqrt{3})^2 + 3^2 = 108 + 9 = 117 \Rightarrow CM = \sqrt{117}$$

(هندسه دهم، صفحه ۴۲)

۲۶. گزینه ۳ صحیح است.

ماتریس A وارون پذیر نیست هرگاه $|A| = 0$ باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2+m & m+1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{|A|=0} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2+m & m+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2m+2+6+3m = 0$$

$$\Rightarrow 5m = -8 \Rightarrow m = -\frac{8}{5} = -1\frac{3}{5}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

۲۷. گزینه ۱ صحیح است.

$$aA + 3A^{-1} = bI \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}(-aA + bI) \quad (1)$$

از طرفی ماتریس‌های $A+2I$ و $A-I$ وارون یکدیگرند. پس:

$$(A-I)(A+2I) = I \Rightarrow A^2 + 2A - A - 2I = I \Rightarrow A^2 + A = 3I$$

$$\Rightarrow A(A+I) = 3I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}(A+I) \quad (2)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{1}{3}(-aA + bI) = \frac{1}{3}(A+I) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۲)

۲۸. گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow A^3 = A^2 \times A = A$$

پس:

$$(A^3 + A^2 - A + I)^{-1} = (A + I - A + I)^{-1} = (2I)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} I^{-1} = \frac{1}{2} I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۱ است.

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

۲۹. گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا $|A|$ را پیدا می‌کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = 3$$

پس تساوی ماتریسی داده شده به صورت زیر درمی‌آید.

$$\begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 1 & \frac{2}{|A|} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$



۳۴. گزینه ۴ صحیح است.

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x+3)(x-2)$$

$$x = 17k \xrightarrow{k=6} 102$$

یا

$$x+3 = 17k \Rightarrow x = 17k - 3 \xrightarrow{k=7} 116$$

یا

$$x-2 = 17k \Rightarrow x = 17k + 2 \xrightarrow{k=6} 104$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۳۵. گزینه ۲ صحیح است.

b فرد و b+2 هم فرد است و چون a | b+2 پس a هم فرد می‌باشد.

$$\begin{cases} \text{فرد } a \Rightarrow a^2 = 8q+1 \\ \text{فرد } b \Rightarrow b^2 = 8q'+1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 8(q+q') + 2$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۶)

۳۶. گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{array}{r|l} a & 12 \\ \hline & q \end{array}$$

$$3q^2 - 1$$

$$0 \leq 3q^2 - 1 < 12 \Rightarrow q_{\max} = 2 \Rightarrow a_{\max} = 12 \times 2 + 11 = 35$$

35 = {1, 5, 7, 35} مقسوم‌علیه‌های 35

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۴)

۳۷. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا (۳۱۲، ۱۴۰۴) را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 312 = 13 \times 2^3 \times 3 \\ 1404 = 3^2 \times 2^2 \times 13 = 156 \end{cases}$$

جواب مسئله [۱۵۶، ۹۰] می‌باشد.

$$\begin{cases} 156 = 2^2 \times 3 \times 13 \\ 90 = 2^1 \times 3^2 \times 5 \end{cases} \Rightarrow [156, 90] = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13 = 2340$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۳۸. گزینه ۲ صحیح است.

باید $d = (3n-1, 5n^2+2n+2)$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} d | 3n-1 \xrightarrow{\times(-5n)} d | -15n^2+5n \\ d | 5n^2+2n+2 \xrightarrow{\times 3} d | 15n^2+6n+6 \end{cases} \Rightarrow d | 11n+6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d | 11n+6 \xrightarrow{\times 3} d | 33n+18 \\ d | 3n-1 \xrightarrow{\times(-11)} d | -33n+11 \end{cases} \Rightarrow d | 29 \Rightarrow d = 29$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۹ و ۱۳)

۳۹. گزینه ۴ صحیح است.

اگر اعداد صحیح را با عدد ۷ افزایش کنیم، خواهیم داشت:

$$n = 7k \Rightarrow n^2 = 7k^2$$

$$n = 7k \pm 1 \Rightarrow n^2 = 7k^2 + 1$$

$$n = 7k \pm 2 \Rightarrow n^2 = 7k^2 + 4$$

$$n = 7k \pm 3 \Rightarrow n^2 = 7k^2 + 9$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۵)

۴۰. گزینه ۲ صحیح است.

$$a = 14q + 5 = 7(2q) + 5 \xrightarrow{\times 11} 11a = 77(2q) + 55$$

$$a = 33q' + 9 = 11(3q') + 9 \xrightarrow{\times 7} 7a = 77(3q') + 63$$

$$\begin{cases} 22a = 77(4q) + 110 \\ -21a = 77(-9q') - 189 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 77(4q - 9q') - 79 + 2 \times 77 - 2 \times 77$$

$$\Rightarrow a = 77(q'' - 2) + 75 \Rightarrow r = 75$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۴ و ۱۶)

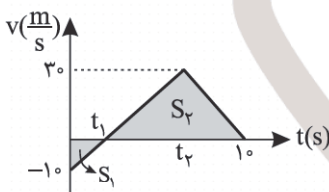
فیزیک

۴۱. گزینه ۱ صحیح است.

در بازه زمانی $10s < t < 25s$ ، علامت سرعت منفی و مکان مثبت است و باید تندی متوسط را در این بازه به دست آوریم.

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{10}{1} = 10 \frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه ۸)



۴۲. گزینه ۲ صحیح است.

می‌دانیم مساحت سطح زیر منحنی سرعت = زمان به مسافت طی شده را می‌دهد.

$$S_1 = \frac{10 \cdot t_1}{2} = 5t_1$$

$$S_T = \frac{(10 - t_1) \times 30}{2} = 150 - 15t_1$$

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow S_{av} = \frac{5t_1 + 150 - 15t_1}{10}$$

$$S_{av} = \frac{150 - 10t_1}{10} \Rightarrow S_{av} = 15 - t_1$$

$$S_{av} = 13 \frac{m}{s} \Rightarrow 15 - t_1 = 13 \Rightarrow t_1 = 2s$$

شیب خط اول شتاب حرکت تندشونده است. (دقت کنید در بازه زمانی t_1 تا t_2 حرکت تندشونده است.)

$$a = \frac{10}{2} = 5 \frac{m}{s^2}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه ۱۱)

۴۳. گزینه ۲ صحیح است.

$$\Delta x = v \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta x (6s \text{ تا } 3s)}{\Delta x (10s \text{ تا } 8s)} = \frac{3v}{2v} = \frac{3}{2}$$

در حرکت با سرعت ثابت، جابه‌جایی متحرک در هر ثانیه برابر با سرعت متحرک است.

(فیزیک دوازدهم، صفحه ۱۴)

۴۴. گزینه ۲ صحیح است.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{16 - 4}{7 - 3} = 3 \frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 \xrightarrow{t=3s} 4 = 3 \times 3 + x_0 \Rightarrow x_0 = -5m$$

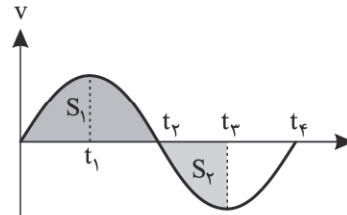
لحظه تغییر جهت بردار مکان: $t = \frac{5}{3}s$

(فیزیک دوازدهم، صفحه ۱۴)



۴۵. گزینه ۴ صحیح است.

(۱)



$$\begin{cases} \Delta x = S_1 - S_2 \\ |S_1| > |S_2| \end{cases} \Rightarrow \Delta x > 0$$

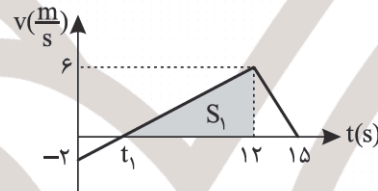
(۲) متحرک در لحظه t_2 تغییر جهت داده است.

(۳) شتاب متحرک در بازه 0 تا t_1 در جهت محور و در بازه t_1 تا t_2 خلاف جهت محور است.

(فیزیک دوازدهم، صفحه ۱۱۳)

۴۶. گزینه ۳ صحیح است.

حرکت تندشونده این متحرک، از لحظه t_1 تا $t = ۱۲$ s است.

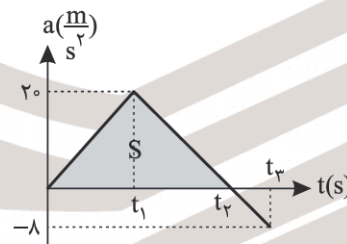


تشابه مثلث : $\frac{t_1}{12-t_1} = \frac{2}{6} \Rightarrow t_1 = 3$ s

$3 < t < 12 \Rightarrow L = S_1 = \frac{(12-3) \times 6}{2} = 27$ m

(فیزیک دوازدهم، صفحه ۱۱۳)

۴۷. گزینه ۳ صحیح است.



$\Delta v = S = \frac{20 \times t_2}{2} = 10 \cdot t_2$

$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 \cdot t_2}{t_2 - 0} = 10 \frac{m}{s^2}$

(فیزیک دوازدهم، صفحه ۱۵)

۴۸. گزینه ۴ صحیح است.

$108 \frac{km}{h} = 30 \frac{m}{s}$, $72 \frac{km}{h} = 20 \frac{m}{s}$

کامیون : $x = vt + x_0 \Rightarrow x_1 = 30t$

خودروی پلیس : $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}t^2 + 20t$

در لحظه به هم رسیدن : $x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{5}{2}t^2 + 20t = 30t \Rightarrow \frac{5}{2}t^2 = 10t$

$\Rightarrow t = 4$ s

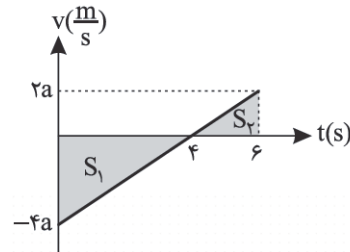
$v = at + v_0 \Rightarrow v = 4 \times 5 + 20 = 40 \frac{m}{s} = 144 \frac{km}{h}$

(فیزیک دوازدهم، صفحه ۱۱۸)

۴۹. گزینه ۲ صحیح است.

در $t = 4$ s ، سرعت متحرک برابر صفر است. با رسم نمودار $v-t$ ، به محاسبه مسافت می پردازیم.

$v = at + v_0 \xrightarrow{t=4s} 0 = 4a + v_0 \Rightarrow v_0 = -4a \Rightarrow v = at - 4a$
 $\Rightarrow v_f = 2a$



$\Delta x = S_1 + S_2 = -\frac{4a \times 4}{2} + \frac{2a \times 2}{2} = -6a$

$L = |S_1| + |S_2| = 8a + 2a = 10a$

$\frac{|\Delta x|}{L} = \frac{6a}{10a} = 0.6$

(فیزیک دوازدهم، صفحه ۱۷)

۵۰. گزینه ۲ صحیح است.

چون نمودار مکان - زمان سهمی شکل است یعنی مکان تابع درجه دوم زمان است، سرعت حرکت تابع درجه اول زمان خواهد شد و نمودار آن خطی است. می دانیم مساحت سطح محصور بین منحنی سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه جایی است، به این ترتیب داریم:

$0 < t < 2 \Rightarrow \Delta x = 6 - (-2) = 8$ m

$\frac{v_0 \times 2}{2} = 8 \Rightarrow v_0 = 8 \frac{m}{s}$

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8}{2} = -4 \frac{m}{s^2}$

$v = at + v_0 \Rightarrow v = -4t + 8$

$t = 5 \Rightarrow v = -4 \times 5 + 8$

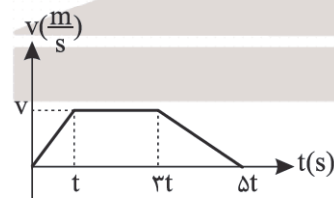
$v = -12 \frac{m}{s} \Rightarrow |v| = 12 \frac{m}{s}$

تندی اندازه سرعت و عددی مثبت است.

(فیزیک دوازدهم، صفحه های ۱۱ و ۱۲)

۵۱. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا نمودار سرعت - زمان حرکت را رسم می کنیم:

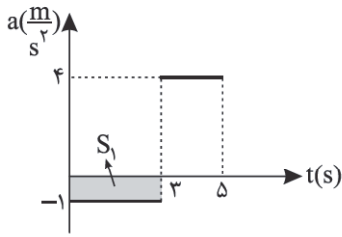


بزرگی تغییر سرعت در مرحله اول و سوم حرکت یکسان است و بر طبق رابطه $\Delta v = a(\Delta t)$ چون بزرگی شتاب در مرحله سوم نصف بزرگی شتاب در مرحله اول است مدت زمان حرکت کندشونده در مرحله سوم دو برابر مدت زمان حرکت تندشونده در مرحله اول حرکت است.

$S_{v-t} = \Delta x \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{\Delta t + 3\Delta t}{2}\right) \times v = \frac{4}{2}v\Delta t$

$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 28 = \frac{4}{2}v \Rightarrow 28 = 2v \Rightarrow v = 14 \frac{m}{s}$

(فیزیک دوازدهم، صفحه های ۱۱ تا ۱۳)



در بازه ۳ تا ۵S حرکت با شتاب ثابت $4 \frac{m}{s^2}$ انجام می‌شود.

$$\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 + v_3 (\Delta t)$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} \times 4 \times 2^2 + (-1 \times 2) = 8 - 2 = 6m$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۵۶. گزینه ۲ صحیح است.

اگر سرعت دو متحرک را در لحظه t_1 برابر با v فرض کنیم داریم:

$$a_B = 2a_A \Rightarrow \frac{v+20}{t_1} = 2 \left(\frac{v-10}{t_1} \right)$$

$$v+20 = 2v-20 \Rightarrow v = 40 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \left(\frac{v+v_0}{2} \right) t \Rightarrow \frac{\Delta x_B}{\Delta x_A} = \frac{\left(\frac{40-20}{2} \right) \times t_1}{\left(\frac{40+10}{2} \right) \times t_1} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۵۷. گزینه ۳ صحیح است.

$$x = -2/\delta t^2 + v_0 t$$

$$-2/\delta t^2 + v_0 t - x' = 0$$

اگر متحرک در دو لحظه t_1 و t_2 از مکان x' بگذرد در معادله

$$-2/\delta t^2 + v_0 t - x' = 0$$

با استفاده از رابطه ضرب ریشه‌ها در معادله درجه ۲،

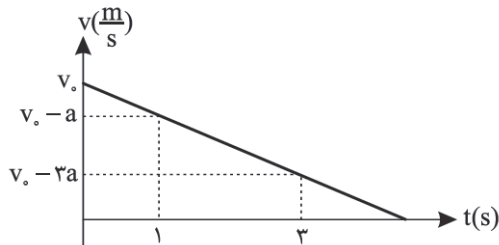
$$at^2 + bt + c = 0 \text{ داریم:}$$

$$t_1 t_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 \times 10 = \frac{-x'}{-2/\delta} \Rightarrow x' = 50m$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۵۸. گزینه ۳ صحیح است.

اگر جهت حرکت اولیه را مثبت فرض کنیم، شتاب حرکت منفی خواهد شد. اگر بزرگی شتاب را a فرض کنیم مطابق نمودار سرعت - زمان داریم:



$$S_{v-t} = \Delta x$$

$$\Delta x (0 < t < 1) = \Delta x (1 < t < 3)$$

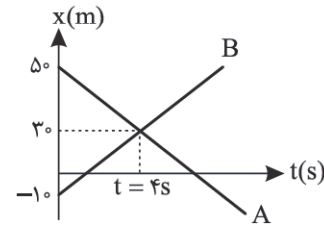
$$\frac{v_0 + (v_0 - a)}{2} \times 1 = \frac{(v_0 - a) + (v_0 - 3a)}{2} \times 2 = 6$$

$$v_0 - \frac{a}{2} = 2v_0 - 4a = 6$$

۵۲. گزینه ۳ صحیح است.

$$v_A = (v_{av})_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 50}{10 - 0} = -5 \frac{m}{s}$$

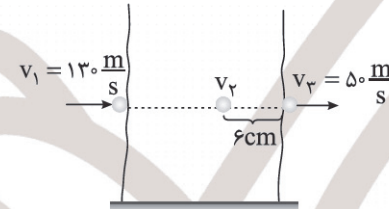
$$x_A = v_A t + x_{0A} \Rightarrow 30 = -5t + 50 \Rightarrow -20 = -5t \Rightarrow t = 4s$$



$$v_B = (v_{av})_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_B = \frac{30 - (-10)}{4 - 0} = \frac{40}{4} = 10 \frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۵۳. گزینه ۱ صحیح است.



$$v = at + v_0 \Rightarrow v_3 = v_2 + at$$

$$\Rightarrow v_3 = 50 - a \times 10^{-3}$$

$$(2, 3): \Delta x = \frac{v_2 + v_3}{2} \Delta t$$

$$\Rightarrow 6 \times 10^{-2} = \frac{50 + (50 - a \times 10^{-3})}{2} \times 10^{-3} \Rightarrow a = -2 \times 10^4 \frac{m}{s^2}$$

$$(1, 3): v_3^2 - v_1^2 = 2a \Delta x \Rightarrow 50^2 - 13^2 = 2 \times (-2 \times 10^4) \times L$$

$$\Rightarrow -12^2 = -4 \times 10^4 L \Rightarrow L = 0.36m = 36cm$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه ۱۸)

۵۴. گزینه ۳ صحیح است.

اگر اندازه شتاب حرکت را

a فرض کنیم، داریم:

$$S_1 = \frac{4(4a)}{2} = 8a$$

$$S_2 = \frac{6 \times 6a}{2} = 18a$$

$$L = S_1 + S_2 \Rightarrow L = 26a = 104 \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$v_0 = 10a = 40 \frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۵۵. گزینه ۳ صحیح است.

می‌دانیم سطح زیر نمودار منحنی شتاب - زمان برابر با تغییر سرعت

است. ابتدا سطح زیر منحنی را بین صفر تا ۳ ثانیه به دست می‌آوریم.

$$0 < t < 3s \Rightarrow \Delta v = S_1 = 3 \times (-1) = -3 \frac{m}{s}$$

$$v_3 - v_0 = -3 \Rightarrow v_3 - 2 = -3 \Rightarrow v_3 = -1 \frac{m}{s}$$



۶۴. گزینه ۲ صحیح است.

راه اول: براساس اصل پاسکال، فشار اضافی ناشی از مایع اضافه شده به طول یکسان به همه نقاط جیوه وارد می شود. اگر A و a مساحت سطح مقطع دهانه ظرف و سطح مقطع پایین ظرف باشند و m جرم مایع اضافه شده باشد، داریم:

$$\frac{mg}{a} = \frac{\Delta F}{A}$$

$$\frac{\Delta F}{mg} = \frac{A}{a} \Rightarrow \frac{\Delta F}{mg} = \frac{50}{10} = 5$$

$$\Delta F = 5mg$$

$$\Delta F = 5\rho Vg$$

$$\Delta F = 5 \times 6.8 \times 10^3 \times 40 \times 10^{-6} \times 10 = 13.6 \text{ N}$$

دقت کنید که مایع سرریز نمی شود.

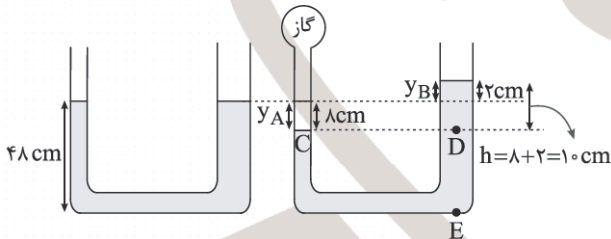
راه دوم: ابتدا افزایش ارتفاع آب در اثر اضافه کردن مایع را به دست می آوریم:

$$V = Ah \Rightarrow 40 = 10h \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

$$F = \rho ghA = 6.8 \times 10^3 \times 4 \times 10^{-2} \times 50 \times 10^{-4} = 13.6 \text{ N}$$

(فیزیک دهم، صفحه های ۳۳ تا ۳۵)

۶۵. گزینه ۳ صحیح است.



$$\Delta V_A = \Delta V_B \Rightarrow y_A \cdot A_A = y_B \cdot A_B \Rightarrow 8 \times A_A = y_B \times 4A_A$$

$$\Rightarrow y_B = 2 \text{ cm}$$

مایع $P_C = P_D = P_0 + P_{\text{مایع}}$ فشار گاز

$$P_{\text{مایع}} \text{ در نقطه } D = \frac{(\rho h)_{\text{مایع}}}{\rho'_{\text{جیوه}}} = \frac{6.8 \times 10}{13.6} = 5 \text{ cmHg}$$

$$P_C = 75 + 5 = 80 \text{ cmHg}$$

(فیزیک دهم، صفحه ۳۴)

۶۶. گزینه ۳ صحیح است.

فشار کل در کف ظرف در ۲ حالت یکسان است. زیرا از رابطه

$P = \frac{(m_1 + m_2)g}{A} + P_0$ به دست می آید که در ۲ حالت وزن کل مایع ثابت است.

$$\rho_T = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{(1 \times Ah_1) + (0.8 \times A \times (4h_1))}{Ah_1 + A \times 4h_1} \Rightarrow \rho = \frac{4.2h_1}{5h_1} = 0.84 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

اگر P فشار کل در کف ظرف باشد، داریم:

$$P = P_A + \rho_1 gh$$

$$P = P'_A + \rho_T gh$$

$$P_A + \rho_1 gh = P'_A + \rho_T gh \Rightarrow P'_A - P_A = gh(\rho_1 - \rho_T)$$

$$P'_A - P_A = 10 \times 0.1 \times (1 - 0.84) \times 10^3 = 0.16 \times 10^3 = 160 \text{ Pa}$$

(فیزیک دهم، صفحه ۳۴)

$$-2 \times \begin{cases} v_0 - \frac{a}{2} = 6 \\ 2v_0 - 4a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2v_0 + a = -12 \\ 2v_0 - 4a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ v_0 = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$v = -at + v_0 \Rightarrow v = (-2 \times 2) + 7 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه های ۱۵ تا ۲۱)

۵۹. گزینه ۴ صحیح است.

گزینه های (الف)، (ب) درست اند و موارد (ج) و (د) غلط است.

(ج) در لوله های مویین که درون ظرف جیوه قرار می گیرند، سطح جیوه درون لوله پایین تر از سطح جیوه درون ظرف است و هر چه قطر لوله کمتر باشد، ارتفاع ستون جیوه در آن کمتر است.

(د) با افزایش دما هر دو نیروی هم چسبی و دگر چسبی کاهش می یابد.

(فیزیک دهم، صفحه های ۲۸ تا ۳۲)

۶۰. گزینه ۴ صحیح است.

اگر سطح داخل لوله مویینی که در آب قرار گیرد، چرب شود سطح آب در لوله پایین رفته و سطح آن به صورت محدب یا برآمده درمی آید.

(فیزیک دهم، صفحه ۳۱)

۶۱. گزینه ۱ صحیح است.

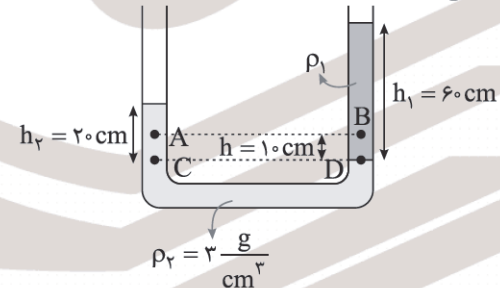
نیروی وارد بر کف ظرف همان وزن مایع است، پس نیروی وارد بر کف

ثابت است. از رابطه $P = \rho gh = \frac{mg}{A}$ چون در حالت دوم سطح

مقطع ۴ برابر می شود و mg ثابت است، پس فشار در کف ظرف $\frac{1}{4}$ برابر می شود.

(فیزیک دهم، صفحه های ۳۳ و ۳۴)

۶۲. گزینه ۲ صحیح است.



در لوله های U شکل که دو مایع مخلوط نشدنی در حالت تعادل قرار دارند، نقاط هم تراز در یک مایع ساکن، هم فشارند و اگر نقاط هم تراز درون دو مایع باشند، نقطه مربوط به مایع چگال تر، فشار کمتری دارد.

$$P_C = P_D \Rightarrow \rho_2 gh_2 + P_0 = \rho_1 gh_1 + P_0$$

$$\Rightarrow \rho_2 h_2 = \rho_1 h_1 \Rightarrow 3 \times 20 = \rho_1 \times 60 \Rightarrow \rho_1 = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$P_C = P_D \Rightarrow P_A + \rho_2 gh = P_B + \rho_1 gh$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = gh(\rho_1 - \rho_2)$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = 10 \times 0.1 \times (1 - 3) \times 10^3 = -2000 \text{ Pa} = -2 \text{ kPa}$$

(فیزیک دهم، صفحه ۳۵)

۶۳. گزینه ۴ صحیح است.

$F = \rho ghA$ نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع

$$= 1000 \times 10 \times 0.2 \times 50 \times 10^{-4} \Rightarrow F = 10 \text{ N}$$

$F' = mg = 0.8 \times 10 = 8 \text{ N}$ نیروی وارد بر سطح زیرین ظرف

(فیزیک دهم، صفحه های ۳۳ تا ۳۵)

۲) به دلیل تفاوت اندک نقطه جوش آرگون و اکسیژن، تهیه آرگون خالص در این روش مقدور نیست.

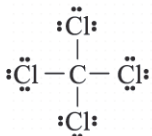
۳) با دور شدن از سطح زمین فشار هوا کاهش می‌یابد و میزان این کاهش با افزایش ارتفاع کمتر است. نمودار تغییرات فشار هوا بر حسب ارتفاع به صورت منحنی می‌باشد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۴۷، ۴۹ و ۵۰)

۷۳. گزینه ۲ صحیح است.

آ) سبک‌ترین گاز نجیب هلیوم است و افزون بر این کاربرد، برای پرکردن بالن‌های هواشناسی، تفریحی و تبلیغاتی در جوشکاری و کپسول غواصی نیز کاربرد دارد.

ب) فرمول شیمیایی مس (II) اکسید به صورت CuO می‌باشد. پ) درست



ت) نادرست، آلومینیم در طبیعت به حالت ترکیب یافت می‌شود.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۵۱ و ۵۳)

۷۴. گزینه ۲ صحیح است.

آ) نادرست، دی‌نیتروژن مونوکسید

ب) درست

پ) درست

ت) نادرست، منیزیم فلئوئورید

ث) درست

ج) نادرست، باریم نیتريد

(شیمی دهم، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵)

۷۵. گزینه ۳ صحیح است.

آ) درست



ب) درست



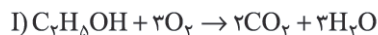
پ) درست، کربن مونوکسید (CO) گازی بی‌رنگ، بی‌بو و بسیار سمی است. چگالی این گاز کمتر از هوا و قابلیت انتشار آن در محیط بسیار زیاد است.

ت) نادرست، در مجموع ۱۴ جفت الکترون ناپیوندی دارند.

ث) درست، CO_۲ و SO_۳ اکسید اسیدی می‌باشند.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷ و ۵۹)

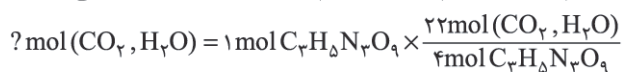
۷۶. گزینه ۱ صحیح است.



آ) درست، مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادله‌های I و II به ترتیب برابر ۹ و ۳۳ می‌باشد.

ب) نادرست، O_۲ ترکیب محسوب نمی‌شود! مجموع ضرایب استوکیومتری CO_۲ و H_۲O در دو واکنش برابر ۲۷ می‌باشد.

پ) درست، CO_۲(g) و H_۲O(g) گاز گلخانه‌ای محسوب می‌شوند.



$$= 5.5 \text{ mol}(\text{CO}_2, \text{H}_2\text{O})$$

۶۷. گزینه ۴ صحیح است.

در حالت شناوری و غوطه‌وری نیروی شناوری برابر وزن است و چون

$$F_A = F_B = mg$$

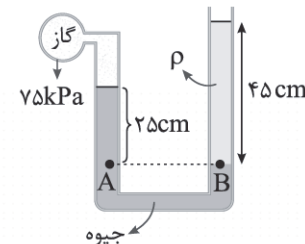
هر دو جسم وزن یکسان دارند، پس:

$$\rho_A < \rho_{\text{آب}} \Rightarrow \rho_A < \rho_B$$

$$\rho_B = \rho_{\text{آب}}$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۶۸. گزینه ۴ صحیح است.



$$P_A = P_B$$

$$75 \times 10^3 + 13600 \times 10 \times \frac{25}{100} = 10^5 + \rho \times 10 \times \frac{45}{100}$$

$$\rho = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

(فیزیک دهم، صفحه ۳۸)

۶۹. گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{آهنگ جریان شاره ورودی} = 3 \frac{\text{lit}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1000 \text{ cm}^3}{1 \text{ lit}} = 50 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$\text{آهنگ جریان شاره خروجی} = Av = 20 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$\text{آهنگ پرشدن ظرف} = 50 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} - 20 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = 30 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = \frac{1}{18} \frac{\text{lit}}{\text{min}}$$

$$\frac{1}{18} \frac{\text{lit}}{\text{min}} = \frac{18 \text{ lit}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 10 \text{ min}$$

(فیزیک دهم، صفحه ۴۴)

۷۰. گزینه ۴ صحیح است.

آهنگ شارش شاره در تمام نقاط ثابت و یکسان است. با عبور شاره از قسمت ۲، مساحت مقطع لوله کاهش یافته و تندی عبور شاره از آن افزایش می‌یابد و طبق اصل برنولی، فشار داخلی شاره کاهش می‌یابد.

(فیزیک دهم، صفحه ۴۴)

شیمی

۷۱. گزینه ۳ صحیح است.

آ) درست

ب) درست، از نیتروژن برای این منظور استفاده می‌شود.

پ) نادرست، کربن دی‌اکسید (CO_۲) گازی سه‌اتمی است!

ت) درست

ث) نادرست، فراوان‌ترین گاز نجیب در هواکره، آرگون (Ar) می‌باشد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۴۶، ۴۸ و ۴۹)

۷۲. گزینه ۴ صحیح است.

یون H_۲⁺ در بین این یون‌ها وجود ندارد. این یون‌ها عبارتند از: N_۲⁺



بررسی عبارت‌های درست:

۱) البته این مقدار از جایی به جای دیگر، از روزی به روز دیگر و حتی از ساعتی به ساعت دیگر تغییر می‌کند.



۸۲. گزینه ۳ صحیح است.

کاهش جرم مخلوط واکنش مربوط به جرم O_2 تولید شده می‌باشد. بنابراین:

$$? L O_2 = 64g O_2 \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{32g O_2} \times \frac{22.4L O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 44.8L O_2$$

$$? g KNO_3 = 64g O_2 \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{32g O_2} \times \frac{2 \text{ mol } KNO_3}{1 \text{ mol } O_2}$$

$$\times \frac{101g KNO_3}{1 \text{ mol } KNO_3} = 404g KNO_3$$

$$m = 404g + 44 = 448g$$

$$\frac{44.8}{448} = 0.1$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۸۳. گزینه ۲ صحیح است.

آ) نادرست، انسان‌ها چند هزار سال پیش از میلاد، به همراه آب از موادی شبیه صابون امروزی برای نظافت و پاکیزگی استفاده می‌کردند.

ب) درست

پ) درست

ت) نادرست، نام گروه عاملی OH - گروه هیدروکسیل می‌باشد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲، ۴ و ۵)

۸۴. گزینه ۲ صحیح است.

چربی‌ها را می‌توان مخلوطی از استرهای بلندزنجیر و اسیدهای چرب دانست.

بررسی عبارت‌های درست:

(۱)

$$\left\{ \begin{array}{l} C_7H_6O_2 = 62 : g.mol^{-1} \text{ اتیلن گلیکول} \\ CO(NH_2)_2 = 60 : g.mol^{-1} \text{ اوره} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_7H_6 = 30 : g.mol^{-1} \text{ اتان} \\ C_7H_8 = 28 : g.mol^{-1} \text{ اتن} \end{array} \right.$$

۳) فرمول کلی صابون جامد به صورت $RCOO^-Na^+$ می‌باشد. صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب هستند.

۴) نمونه‌هایی از این مخلوط‌ها: آب دریا، هوا، نوشیدنی‌ها، انواع رنگ‌ها، سرامیک‌ها، چسب‌ها، شوینده‌ها، داروها و...

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۴ تا ۶)

۸۵. گزینه ۳ صحیح است.

مخلوط‌های A، B و C به ترتیب: سوسپانسیون، کلویید و محلول محسوب می‌شوند.

آ) درست، محلول‌ها نور را عبور می‌دهند و کلویید و سوسپانسیون نور را پخش می‌کنند.

ب) درست، کلوییدها و محلول‌ها پایدار بوده و ته‌نشین نمی‌شوند.

پ) درست

محلول > کلویید > سوسپانسیون: اندازه ذرات سازنده

ت) نادرست، کلوییدها مخلوط‌هایی ناهمگن می‌باشند.

ث) نادرست

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۷ و ۸)

۸۶. گزینه ۴ صحیح است.

الگوهای (I) و (II) به ترتیب به اسید چرب و استر سنگین مربوط است. هر چند به دلیل وجود گروه کربوکسیل ($-COOH$) در اسیدهای چرب امکان تشکیل پیوند هیدروژنی وجود دارد. اما به دلیل غلبه بخش ناقطبی بر قطبی، اسیدهای چرب در آب نامحلول‌اند.

ت) نادرست، در واکنش (I) ضریب استوکیومتری O_2 و H_2O یکسان است.

ث) درست

$$? L O_2 = 0.2 \text{ mol } C_7H_8OH \times \frac{3 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol } C_7H_8OH} \times \frac{22.4L O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 13.44L O_2$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۶۳، ۶۴، ۶۹ و ۸۰)

۷۷. گزینه ۴ صحیح است.

با افزایش مقدار میانگین کربن دی‌اکسید در هواکره، میانگین دمای کره زمین، میانگین مساحت برف در نیمکره شمالی و میانگین جهانی آب‌های آزاد به ترتیب افزایش، کاهش و افزایش می‌یابد. بدیهی است مساحت برف ذوب‌شده در نیمکره شمالی افزایش می‌یابد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۶۴ و ۶۷)

۷۸. گزینه ۲ صحیح است.

در تولید مقدار یکسانی برق از منابع زیر، مقایسه ردپای CO_2 تولید شده عبارت است از:

باد > گرمای زمین > انرژی خورشید > گاز طبیعی > نفت خام > زغال سنگ

(شیمی دهم، صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۷۹. گزینه ۲ صحیح است.

اگر هواکره زمین وجود نداشت، میانگین دمای کره زمین به $-18^\circ C$ کاهش می‌یافت. با کاهش دما از $14^\circ C$ به $-18^\circ C$ مقدار کاهش دما برابر $32^\circ C$ خواهد بود.

بررسی عبارت‌های درست:

۱) گازهای گلخانه‌ای مانع از خروج کامل گرمای آزاد شده می‌شود.

۳) بخش عمده‌ای از این پرتوها به وسیله زمین جذب می‌شود.

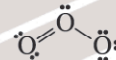
۴) سوخت سبز سوختی است که در ساختار خود افزون بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز دارد و از پسماندهای گیاهی مانند شاخ و برگ گیاه سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به دست می‌آید. این مواد زیست‌تخریب‌پذیرند، از این رو به وسیله جانداران ذره‌بینی به مواد ساده‌تر تجزیه می‌شوند.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۶۹ و ۷۰)

۸۰. گزینه ۲ صحیح است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

۱) این نسبت در هر دو یکسان و برابر $\frac{1}{3}$ می‌باشد.



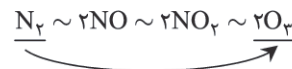
۳) پرتو موردنظر، پرتو پراثری فرابنفش می‌باشد.

۴) اصطلاح لایه اوزون به منطقه مشخصی از استراتوسفر (دومین لایه هواکره) می‌گویند که بیشترین مقدار اوزون در آن محدوده قرار دارد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۸۱. گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به این سه واکنش، با مصرف هر مول N_2 حداکثر ۲ مول O_3 تولید می‌شود. زیرا:



$$? L O_3 = 3/0 \times 1 \times 10^{24} N_2 \times \frac{1 \text{ mol } N_2}{6.02 \times 10^{23} N_2} \times \frac{2 \text{ mol } O_3}{1 \text{ mol } N_2}$$

$$\times \frac{22.4L O_3}{1 \text{ mol } O_3} = 224L O_3$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۷۵، ۷۶، ۸۰ و ۸۱)



بررسی عبارت‌های درست:

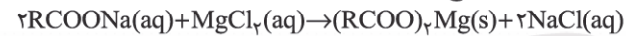
(۱) از واکنش اسیدهای چرب یا استر اسیدهای چرب با NaOH می‌توان صابون جامد (RCOO^-Na^+) تولید کرد.

(۲) الگوی مربوط به مولکول روغن زیتون یا چربی کوهان شتر ($\text{C}_{57}\text{H}_{111}\text{O}_6$) همانند الگوی (II) می‌باشد.

(۳) زیرا در مولکول استر سنگین و اسید چرب به ترتیب ۶ و ۲ اتم اکسیژن وجود داشته و هر اتم اکسیژن در ترکیب‌های آلی دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی است.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۵ و ۶)

۸۷. گزینه ۳ صحیح است.



$$59\text{g} (\text{RCOO})_2\text{Mg} = 0.2\text{mol RCOONa} \times \frac{1\text{mol} (\text{RCOO})_2\text{Mg}}{2\text{mol RCOONa}}$$

$$\times \frac{x\text{g} (\text{RCOO})_2\text{Mg}}{1\text{mol} (\text{RCOO})_2\text{Mg}} \Rightarrow x = 590\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow (\text{RCOO})_2\text{Mg} = 590\text{g} \Rightarrow 2R + 88 + 24 = 590$$

$$\Rightarrow R = 239\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{RCOONa} = 239 + 12 + 32 + 23 = 306\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۷ و ۹)

۸۸. گزینه ۴ صحیح است.

چون این صابون مایع است، کاتیون M^+ باید K^+ یا NH_4^+ باشد.

جرم مولی صابون‌های مایع RCOO^-K^+ و $\text{RCOO}^-\text{NH}_4^+$ به ترتیب زوج و فرد می‌باشد:

$$24/0.8\text{g RCOO}^-\text{M}^+ = 0.8\text{mol RCOO}^-\text{M}^+$$

$$\times \frac{x\text{g RCOO}^-\text{M}^+}{1\text{mol RCOO}^-\text{M}^+} \Rightarrow \text{RCOOM}^+ = 30.1\text{g}$$

بنابراین M^+ در آن NH_4^+ است.

(۱) درست، عنصرهای سازنده آمیدها نیز C، H، N و O هستند.

(۲) درست

$$\text{RCOO}^-\text{NH}_4^+ = 30.1\text{g} \cdot \text{mol}^{-1} \Rightarrow R + 12 + 32 + 14 + 4 = 30.1\text{g}$$

$$\Rightarrow R = 239\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{C}_n\text{H}_{2n+1} = 239 \Rightarrow n = 17 \Rightarrow \text{C}_{17}\text{H}_{35}$$

پس فرمول اسید چرب آن $\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH}$ ، خواهد بود و با توجه به

$\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COO}^-\text{NH}_4^+$ فرمول شیمیایی این صابون ۳۹ اتم H وجود دارد.

$$\text{C}_{18}\text{H}_{37}\text{O}_2 \text{ یا } \text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH}$$

(۳) درست، زیرا کاتیون M^+ در آن K^+ نیست!

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۵ و ۶)

۸۹. گزینه ۲ صحیح است.

(آ) نادرست، این گونه آب‌ها به «آب سخت» معروف هستند.

(ب) نادرست، زیرا این ماده در آب نامحلول است و انحلال‌پذیری مواد نامحلول در آب از ۰/۱ گرم حل‌شونده در ۱۰۰ گرم آب کمتر است.

(پ) درست

(ت) درست، زیرا بخش ناقطبی در آنها، بر بخش قطبی غلبه دارد. فرمول همگانی این نوع صابون‌ها که جامد هستند، RCOONa است که در آن R یک زنجیر هیدروکربنی بلند است.

(ث) درست، زیرا با افزودن صابون به مخلوط آب و روغن، یک کلوئید ایجاد می‌شود و کلوئیدها ناهمگن و پایدار بوده و ته‌نشین نمی‌شوند.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۶، ۷ و ۹)

۹۰. گزینه ۲ صحیح است.

شربت معده یک سوسپانسیون محسوب می‌شود.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۶، ۷ و ۱۱)

۹۱. گزینه ۱ صحیح است.

$$\text{RCOO}^-\text{M}^+ = ? \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{11}\text{C}_6\text{H}_4\text{SO}_3^-\text{Na}^+ = 348\text{g}$$

با توجه به یکسان بودن گروه R هر دو پاک‌کننده و تفاوت جرم مولی آنها و بیشتر بودن جرم مولی پاک‌کننده غیرصابونی می‌توان نوشت:

$$\text{RCOO}^-\text{M}^+ = 348 - 117 = 231\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{11}\text{COO}^-\text{M}^+ = 231\text{g} \Rightarrow \text{M}^+ = 18\text{g} \cdot \text{mol}^{-1} \Rightarrow \text{NH}_4^+$$

نکته: بدون محاسبه و با توجه به یکسان بودن شمار اتم‌های H در هر

دو پاک‌کننده، به سادگی NH_4^+ به دست می‌آید!!!

(شیمی دوازدهم، صفحه ۱۱)

۹۲. گزینه ۲ صحیح است.

از مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم برای باز کردن مجاری مسدود شده در برخی وسایل و دستگاه‌های صنعتی استفاده می‌شود.

این پاک‌کننده به شکل پودر عرضه می‌شود و یک پاک‌کننده خورنده می‌باشد. از این پودر برای باز کردن لوله‌ها و مسیرهایی استفاده می‌شود که بر اثر ایجاد رسوب و تجمع چربی‌ها بسته شده‌اند.

(آ) نادرست

(ب) درست، گاز X_2 گاز هیدروژن می‌باشد.

(پ) نادرست، آلومینیم در واکنش با محلول اسیدها یا بازها گاز H_2 تولید می‌کند.

(ت) درست، گرما منجر به ذوب چربی‌هایی که باعث مسدود شدن لوله‌ها و مسیرها شده‌اند می‌شود و تولید گاز با ایجاد فشار مکانیکی باعث باز شدن لوله و مسیر می‌شود. افزودن بر آن باعث ایجاد سوراخ‌های ریز در چربی‌ها و پاک کردن آسان‌تر می‌شود.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۲ و ۱۳)

۹۳. گزینه ۱ صحیح است.

جوهرنمک و سدیم هیدروکسید پاک‌کننده‌های خورنده محسوب می‌شوند و از نظر شیمیایی فعال‌اند و نباید با پوست تماس داشته باشند. رنگ کاغذ pH در محلول‌های جوهرنمک و سدیم هیدروکسید به ترتیب قرمز و آبی می‌باشد.

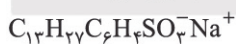
(شیمی دوازدهم، صفحه ۱۲)

۹۴. گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به آنکه فرمول عمومی بنیان آلکیل (R) به صورت $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}$ می‌باشد، فرمول شیمیایی R به صورت $\text{C}_{12}\text{H}_{27}$ خواهد بود:

$$2n + 1 = 27 \Rightarrow n = 13$$

بنابراین این پاک‌کننده در مجموع دارای ۱۹ اتم کربن می‌باشد:



فرمول مولکولی نفتالن C_{10}H_8 می‌باشد.

(شیمی دوازدهم، صفحه ۱۱)

۹۵. گزینه ۴ صحیح است.

برای این منظور صابون‌ها ترکیب‌های کلردار اضافه می‌کنند.

بررسی عبارت‌های درست:

(۱) زیرا این پاک‌کننده یک پاک‌کننده غیرصابونی است. پاک‌کننده‌های غیرصابونی و صابونی براساس برهم‌کنش میان ذره‌ها عمل می‌کنند.

(۲) به همین دلیل مصرف زیاد شوینده‌ها و تنفس بخار آنها، عوارض پوستی و بیماری‌های تنفسی ایجاد می‌کند.

(۳) این نمک‌ها با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب‌های سخت واکنش داده و از تشکیل رسوب و ایجاد لکه جلوگیری می‌کنند.

(شیمی دوازدهم، صفحه ۱۲)